Colles
corrigées et commentées

BCPST 1

Maths

*S'entraîner aux concours dès la **Sup***

Tancrède Huet
Antoine Humeau
Marie Le Verdier

ellipses

Chapitre 1. Logique, raisonnements et ensembles

Exercice 1

Montrer qu'il n'existe pas d'entier à la fois pair et impair.

Commentaire

Une idée aussi absurde qu'un entier à la fois pair et impair appelle un raisonnement par... l'absurde.

Supposons par l'absurde qu'il existe un tel entier $n \in \mathbb{Z}$. Puisque n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Puisque n est également impair, il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k' + 1$.
On a alors $2k = 2k' + 1$ d'où $2k - 2k' = 1$ *i.e.* $2(k - k') = 1$. Alors 1 serait divisible par 2 bien qu'impair, d'où une contradiction.
Il n'existe donc pas de nombre entier qui soit à la fois pair et impair.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{\circ n} = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (composée de n fonctions f successives).
Déterminer $f^{\circ 2}$ et $f^{\circ 3}$, en déduire une conjecture sur l'expression de $f^{\circ n}$ puis prouver cette conjecture.

Commentaire

Même si on ne sait pas a priori quelle formule on va trouver, ce sera une formule en fonction de $n \in \mathbb{N}$, ce qui fait immédiatement penser à une récurrence.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f^{\circ 2}(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{1+x^2}) = \sqrt{1+(\sqrt{1+x^2})^2} = \sqrt{1+1+x^2} = \sqrt{2+x^2}$$

et :

$$f^{\circ 3}(x) = f(f^{\circ 2}(x)) = f(\sqrt{2+x^2}) = \sqrt{1+(\sqrt{2+x^2})^2} = \sqrt{1+2+x^2} = \sqrt{3+x^2}.$$

On conjecture alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{\circ n}(x) = \sqrt{n+x^2}$. On va montrer cette propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{\circ n}(x) = \sqrt{n+x^2}$. Montrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f^{\circ(n+1)}(x) = \sqrt{n+1+x^2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f^{\circ(n+1)}(x) &= f\left(f^{\circ n}(x)\right) \\ &= f(\sqrt{n+x^2}) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \sqrt{1+(\sqrt{n+x^2})^2} \\ &= \sqrt{1+n+x^2}, \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f^{\circ n}(x) = \sqrt{n+x^2}.}$$

Exercice 3

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

$$(A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C) \implies B \subset C.$$

Commentaire

On part sur une preuve classique par implication d'appartenance : montrer que $x \in B$ appartient aussi à C. Pour faire le lien avec le troisième sous-ensemble A, on pense à distinguer les cas selon que x soit dans A ou non.

Supposons que $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C$.
Prenons $x \in B$ et montrons que $x \in C$. Distinguons les cas suivant l'appartenance ou non de x à A.

Cas 1 : si $x \in A$ Puisque $x \in B$, on a $x \in A \cap B$. Or $A \cap B \subset A \cap C$ d'où $x \in A \cap C$, puis $x \in C$.

Cas 2 : $x \notin A$ Puisque $x \in B$, on a $x \in A \cup B$. Or $A \cup B \subset A \cup C$ d'où $x \in A \cup C$. Or $x \notin A$, ce qui nous donne $x \in C$.

Dans tous les cas, $x \in C$, d'où $\boxed{B \subset C.}$

Exercice 4

Soit $n+1$ nombres réels $x_0, x_2, \ldots, x_n$ qui vérifient l'inégalité :

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n \leqslant 1.$$

Montrer qu'il y a au mons deux x_i consécutifs qui sont distants d'au plus $\dfrac{1}{n}$.

Commentaire

Puisque le résultat à démontrer dépend uniquement de n, on peut être tenté par une récurrence. Même si cele peut fonctionner, ce n'est pas la méthode la plus efficace.

On s'apperçoit que l'assertion contraire à celle de l'énoncé est assez contraignante, puisqu'elle porte sur tous les x_i. Ceci invite à envisager un raisonnement par l'aburde.

Formellement, on doit montrer l'assertion suivante :

$$\exists i \in [\![0\,;n-1]\!], x_{i+1} - x_i \leqslant \frac{1}{n}.$$

On va montrer ce résultat par l'absurde. Supposons donc l'assertion contraire *i.e.* :

$$\forall i \in [\![0\,;n-1]\!], x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}.$$

Si on additionne ces n égalités strictes, on obtient :

$$(\cancel{x_1} - x_0) + (\cancel{x_2} - \cancel{x_1}) + \cdots + (\cancel{x_{n-1}} - \cancel{x_{n-2}}) + (x_n - \cancel{x_{n-1}}) > n \times \frac{1}{n}.$$

Après simplification, ceci nous donne $x_n - x_0 > 1$. Or $0 \leqslant x_0 \leqslant x_n \leqslant 1$ d'où $x_n - x_0 \leqslant 1$. On a alors une contradiction.

Par conséquent, il y a au moins deux x_i consécutifs qui sont distants d'au plus $\frac{1}{n}$.

Exercice 5

On note A l'ensemble des fonctions affines réelles et B l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer que toute fonction dérivable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction de A et d'une fonction de B.

Commentaire

Les exercices de ce type où l'on cherche une décomposition (unique ou non d'un objet) se font par analyse-synthèse. On suppose dans la phase d'analyse que la décomposition existe pour chercher des conditions sur cette décomposition. Une fois ces conditions trouvées, on vérifie qu'elles conviennent dans la phase de synthèse.

On va raisonner par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Puisque a est affine, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}, a(x) = \lambda x + \mu$.

On a d'une part $f(0) = a(0) + b(0) = \lambda \times 0 + \mu + b(0) = \mu$ car $b \in B$.

D'autre part f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables avec $f'(x) = (\lambda x + \mu)' + b'(x) = \lambda + b'(x)$ d'où $f'(0) = \lambda$ car $b \in B$.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, a(x) = f'(0)x + f(0)$ et $b(x) = f(x) - a(x)$.

Synthèse : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si on se donne, sur $\mathbb{R}$, les fonctions a et b définies par $a(x) = f'(0)x + f(0)$ et $b(x) = f(x) - a(x)$.

Clairement, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = a(x) + b(x)$. Tout aussi clairement, a est une fonction affine *i.e.* $a \in A$.

De plus, b est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables avec $b'(x) = f'(x) - (f'(0)x+f(0))' = f'(x)-f'(0)$. Ceci nous donne d'une part $b(0) = f(0)-a(0) = f(0)-f(0) = 0$ et d'autre part $b'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$. On a donc $b \in B$.

Pour toute fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f = a + b$.

De plus, a et b sont uniques car entièrement déterminées par les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

Indication : On pourra développer l'expression $\left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

On calcule :

$$\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}\right).$$

Commentaire

Le calcul effectué nous permet de relier notre expression aux rangs $n, n+1$ et $n+2$, ce qui nous amène tout naturellement à considérer un raisonnement par récurrence double.

On va donc montrer la propriété $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double.

Initialisation : On a d'une part $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$ et d'autre part $x^1 + \dfrac{1}{x^1} = x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ par hypothèse de l'énoncé.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ et tel que $x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}} \in \mathbb{Z}$. Montrons que $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$. D'après le calcul préliminaire, on a :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Puisque $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ et $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$, on a donc $x^{n+2} + \dfrac{1}{x^{n+2}} \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : Par le principe de récurrence double, on a donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.}$

Exercice 7

Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(x) + f(y).$$

Commentaire

Ce type d'équation, appelé « équation fonctionnelle » se résout toujours par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse on cherche des informations sur f en testant d'abord certaines valeurs (souvent 0 ou 1) dans l'équation fonctionnelle puis en cherchant l'expression générale de $f(x)$. On vérifie ensuite cette expression dans la phase de synthèse.

On va raisonner par analyse synthèse :

Analyse : Soit f une application de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

Commençons par regarder cette égalité pour $x = y = 0$: on a $f(0)f(0) = f(0) + f(0)$ puis $f(0)^2 - 2f(0) = 0$ d'où $f(0)(f(0) - 2) = 0$. On a donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$.

Si $f(0) = 0$, prenons $x \in \mathbb{R}$ quelconque et 0 et réappliquons notre égalité fonctionnelle. On a alors $f(0)f(x) = f(0) + f(x)$, soit $0 = f(x)$. f est alors la fonction nulle.

Si $f(0) = 2$, prenons $x \in \mathbb{R}$ quelconque et 0 et réappliquons notre égalité fonctionnelle. On a alors $f(0)f(x) = f(0) + f(x)$ d'où $2f(x) = 2 + f(x)$ soit $f(x) = 2$. f est alors la fonction constante égale à 2.

f est donc soit la fonction nulle, soit la fonction constante égale à 2.

Synthèse : Soit f qui est soit la fonction nulle, soit la fonction constante égale à 2.

Si f est la fonction nulle, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 0 = f(x) + f(y)$.

Si f est l'application constante égale à 2, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}, f(x)f(y) = 4 = f(x)+f(y)$.

Dans les deux cas, f vérifie l'égalité fonctionnelle.

Les solutions de notre problème sont donc les fonctions $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 2$.

Exercice 8

Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier impair λ_n (qui dépend donc de n) tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$.

Commentaire

On a ici clairement un exercice qui se fait par récurrence. La difficulté principale, dans la phase d'hérédité, consiste à appliquer rigoureusement les règles des puissances : $5^{2^{n+1}}$ vaut $5^{2\times 2^n}$ et pas $5^2 \times 5^{2^n}$.

On va montrer la propriété demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $5^{2^0} = 5^1 = 5$. En posant $\lambda_0 = 1$, qui est bien un nombre impair, on a $5 = 1 + \lambda_0 2^2$, d'où $5 = 1 + \lambda_0 2^{0+2}$.

Initialisation : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un entier impair λ_n tel que $5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}$. Montrons qu'il existe un entier impair λ_{n+1} tel que $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$. On a :

$$\begin{aligned} 5^{2^{n+1}} &= 5^{2\times 2^n} = \left(5^{2^n}\right)^2 \\ &= \left(1 + \lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 \times \lambda_n 2^{n+2} + \left(\lambda_n 2^{n+2}\right)^2 \\ &= 1 + \lambda_n 2^{n+3} + \lambda_n^2 2^{2n+4} \\ &= 1 + \left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n 2^{n+3}. \end{aligned}$$

Puisque λ_n est un nombre impair, $\lambda_n 2^{n+1}$ est également un nombre impair. On en déduit que $1 + \lambda_n 2^{n+1}$ est un nombre pair, puis que $\left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n$ est un nombre impair.

Si on pose $\lambda_{n+1} = \left(1 + \lambda_n 2^{n+1}\right) \lambda_n$, on a donc $5^{2^{n+1}} = 1 + \lambda_{n+1} 2^{n+3}$ où λ_{n+1} est un nombre impair.

Conclusion : Par le principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lambda \in \mathbb{Z} \text{ avec } \lambda \text{ impair tel que } 5^{2^n} = 1 + \lambda_n 2^{n+2}.}$$

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.
Indication : On raisonnera par récurrence forte pour l'hypothèse :

$$\mathcal{P}(n) : \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1).$$

Commentaire

La décomposition recherchée, sous la forme du produit d'une puissance de 2 avec un nombre impair invite, dans la phase d'hérédité à distinguer les cas $n+1$ pair et $n+1$ impair.

On va montrer par récurrence forte, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1).$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $2^0(2 \times 0 + 1) = 1$. $p = q = 0$ conviennent donc et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], \mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On va distinguer les cas selon la parité de $n+1$.

Si $n+1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k$. On a alors $k \in [\![1\,;n]\!]$ et, par hypothèse de récurrence, il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^r(2s+1)$ d'où :

$$n+1 = 2k = 2 \times 2^r(2s+1) = 2^{r+1}(2s+1).$$

En posant $p = r+1$ et $q = s$, on a donc la décomposition souhaitée.

Si $n+1$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = 2k+1 = 2^0(2k+1)$. En posant $p = 0$ et $q = k$, on a donc la décomposition souhaitée.

Dans tous les cas on peut ainsi écrire $n+1$ sous la forme souhaitée.

Conclusion : Par le principe de récurrence forte $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'existence de $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.

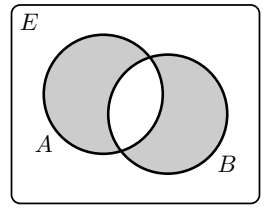
Exercice 10

Soit E un ensemble et A, B deux parties de E. On appelle *différence symétrique* l'ensemble $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Visualiser cette nouvelle opération ensembliste à l'aide d'un diagramme de Venn (patatoïde).
2. À quel connecteur logique (non vu en cours mais facilement devinable) correspond cette opération ensembliste ? Donner sa table de vérité.
3. Calculer $A\Delta A$ et $A\Delta\varnothing$.
4. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
5. Montrer que $(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C)$. L'inclusion réciproque est-elle toujours vraie ?

1.



$A\Delta B$

2. L'opération ensembliste Δ correspond au connecteur logique SOIT ou OU EXCLUSIF que l'on notera XOR.
Si P et Q sont deux assertions, $P \operatorname{XOR} Q$ est vraie si et seulement si une seule des deux assertions P et Q est vraie. Autrement dit, on a la table de vérité suivante :

P	Q	$P \operatorname{XOR} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3. On a :

$$A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A \boxed{= \varnothing}$$

et

$$A\Delta\varnothing = (A \cup \varnothing) \setminus (A \cap \varnothing) = A \setminus \varnothing \boxed{= A.}$$

4.

> **Commentaire**
> Dans cette question, il faut appliquer avec rigueur les règles de calcul sur les parties d'un ensemble pour passer d'une expression de $A\Delta B$ à l'autre.

On a :

$$\begin{aligned} A\Delta B &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} \\ &= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{B}) \\ &= \varnothing \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \varnothing \\ &\boxed{= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).} \end{aligned}$$

5.

> **Commentaire**
> Pour la preuve d'inclusion directe, il faut utiliser le connecteur logique associé à Δ pour exprimer de manière détaillée l'appartenance d'un élément à $A\Delta B$ dans le raisonnement.

Soit $x \in (A\Delta B) \cap C$; montrons que $x \in A\Delta(B \cap C)$. On a $x \in C$ et, soit $x \in A$, soit $x \in B$ (mais jamais $x \in A \cap B$). Effectuons une disjonction de cas.
Si $x \in A$, on a $x \notin B$ d'où $x \notin B \cap C$. On a donc $x \in A\Delta(B \cap C)$.
Si $x \in B$, on a $x \notin A$. Puisque $x \in C$, on a $x \in B \cap C$. On en déduit que $x \in A\Delta(B \cap C)$.
Dans tous les cas, $x \in A\Delta(B \cap C)$. On en déduit que $\boxed{(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C).}$

Commentaire
Pour vérifier si l'inclusion réciproque est vraie, il faut la tester sur de petits exemples (des ensembles à un, deux ou trois élément). Cela permet de voir assez vite si quelque chose cloche et d'obtenir ainsi un contre-exemple.

L'inclusion réciproque n'est pas vraie en générale. En effet, dans $\mathbb{N}$, prenons $A = \{0\,;1\,;3\}$ $B = \{0\,;2\}$ et $C = \{0\,;3\}$.
On a d'une part :

$$(A\Delta B) \cap C = (\{0\,;1\,;3\}\Delta\{0\,;2\}) \cap \{0\,;3\} = \{1\,;2\} \cap \{0\,;3\} = \varnothing$$

et d'autre part :

$$A\Delta(B \cap C) = \{0\,;1\,;3\}\Delta(\{0\,;2\} \cap \{0\,;3\}) = \{0\,;1\,;3\}\Delta\{0\} = \{1\,;3\}.$$

On a ici $(A\Delta B) \cap C \subset A\Delta(B \cap C)$ mais $A\Delta(B \cap C) \not\subset (A\Delta B) \cap C$.

Exercice 11

Soit E un ensemble non vide. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole sur E si :
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$;
- $E \in \mathcal{A}$;
- $X \in \mathcal{A} \implies \overline{X} \in \mathcal{A}$;
- $(X \in \mathcal{A} \text{ ET } Y \in \mathcal{A}) \implies X \cup Y \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par intersection, c'est à dire :

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, X \cap Y \in \mathcal{A}.$$

2. Quelles sont les deux algèbres de Boole les plus simples que l'on puisse poser sur E ?

3. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur E et B une partie de E. Montrer que $\mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ est une algèbre de Boole sur B.

1.

Commentaire
Puisqu'on dispose ici de la stabilité par passage au complémentaire et à l'union, il faut penser à la loi de Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Soit $X, Y \in \mathcal{A}$. On a $\overline{X} \in \mathcal{A}$ et $\overline{Y} \in \mathcal{A}$, puis $\overline{X} \cup \overline{Y} \in \mathcal{A}$, par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage à l'union. Par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage au complémentaire, on en déduit $\overline{\overline{X} \cup \overline{Y}} \in \mathcal{A}$ soit, par la loi de Morgan, $X \cap Y \in \mathcal{A}$.

2. Une première possibilité est $\mathcal{A} = (\varnothing, E)$.
En effet, on a $(\varnothing, E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $E \in (\varnothing, E)$. De plus $\overline{\varnothing} = E \in (\varnothing, E)$ et $\overline{E} = \varnothing \in (\varnothing, E)$. Enfin, $E \cup E = E \in (\varnothing, E), \varnothing \cup \varnothing = \varnothing \in (\varnothing, E)$ et $\varnothing \cup E = E \in (\varnothing, E)$.

Une deuxième possibilité est $\boxed{\mathcal{A} = \mathcal{P}(E).}$
En effet, on a tout d'abord $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$. Ensuite, pour $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $\overline{X} \in \mathcal{P}(E)$. Enfin, si $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, on a $X \cup Y \in \mathcal{P}(E)$.
3. Puisque, pour tout $A \in \mathcal{A}, A \cap B \subset B$ *i.e.* $A \cap B \in \mathcal{P}(B)$, on a $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(B)$.
Ensuite, puisque $E \in \mathcal{A}$, on a $E \cap B = B \in \mathcal{B}$.
Soit maintenant $X \in \mathcal{B}$. Il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $X = A \cap B$. On a alors :

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \overline{A \cap B} \cap B = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap B \\ &= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap B) = \overline{A} \cap B\end{aligned}$$

Puisque $A \in \mathcal{A}$, on a, par stabilité par passage au complémentaire, $\overline{A} \in \mathcal{A}$, d'où $\overline{X} = \overline{A} \cap B \in \mathcal{B}$.
Soit enfin $X, Y \in \mathcal{B}$. Il existe $A, A' \in \mathcal{A}$ tels que $X = A \cap B$ et $Y = A' \cap B$. On a alors :

$$X \cup Y = (A \cap B) \cup (A' \cap B) = (A \cup A') \cap B.$$

Par stabilité de $\mathcal{A}$ par passage à l'union, on a $A \cup A' \in \mathcal{A}$, d'où $X \cup Y = (A \cup A') \cap B \in \mathcal{B}$.
On a ainsi bien vérifié que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une algèbre de Boole sur } B.}$

Chapitre 2. Nombres réels

Exercice 1

Montrer que pour tous réels x et y :

$$\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \text{ et } \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

On distingue deux cas :

Premier cas : On suppose que $x \leqslant y$. Alors $\min(x,y) = x$ et

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(y-x)}{2} = x.$$

Par ailleurs, $\max(x,y) = y$ et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(y-x)}{2} = y.$$

Second cas : On suppose que $x > y$. Alors $\min(x,y) = y$ et

$$\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-(x-y)}{2} = y.$$

Par ailleurs, $\max(x,y) = x$ et

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+(x-y)}{2} = x.$$

Dans tous les cas, les expressions coïncident. On a donc bien :

$$\boxed{\min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} \text{ et } \max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}.}$$

Exercice 2

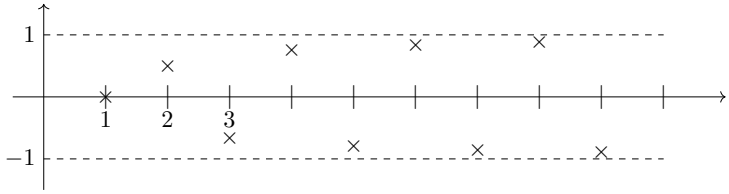
Montrer que l'ensemble suivant admet une borne inférieure et une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. S'agit-il de minimum, de maximum ?

$$A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$ et donc

$$-1 \leqslant (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 1.$$

La partie A est donc non vide et bornée, donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure.



Montrons que 1 est la borne supérieure de A et -1 sa borne inférieure.

Commentaire

Pour montrer que 1 est la borne supérieure de A, il faut montrer deux choses :

- 1 est un majorant de A (ça on l'a déjà fait),
- 1 est le plus petit des majorants de A : cela signifie que si $\varepsilon > 0$, $1-\varepsilon$ n'est plus un majorant de A, c'est à dire qu'il existe $y \in A$ vérifiant $1 - \varepsilon < y$.

Cela revient à montrer que :

$$\begin{cases} \forall y \in A,\ y \leqslant 1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ 1 - \varepsilon < y \leqslant 1. \end{cases}$$

Pour la borne inférieure, on a quelque chose d'analogue.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$. En particulier,

$$\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Si N est pair : d'une part $(-1)^N \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = 1 - \dfrac{1}{N} > 1 - \varepsilon$ et d'autre part

$$(-1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = -1 + \frac{1}{N+1} < -1 + \varepsilon.$$

Si N est impair : d'une part $(-1)^N \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) = -1 + \dfrac{1}{N} < -1 + \varepsilon$ et d'autre part

$$(-1)^{N+1} \left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} > 1 - \varepsilon.$$

Dans les deux cas, il existe donc $x \in A$ et $y \in A$ tels que

$$-1 \leqslant x < -1+\varepsilon \quad \text{et} \quad 1-\varepsilon < y \leq 1.$$

On a montré que :

$$\begin{cases} \forall y \in A,\ y \leqslant 1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ 1-\varepsilon < y \leqslant 1. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall y \in A,\ y \geqslant -1 \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ -1 \leqslant y < -1+\varepsilon. \end{cases}$$

On en déduit que $\boxed{\inf A = -1 \text{ et } \sup A = 1.}$
Par ailleurs, pour $n \geqslant 1$, on a $\left|(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = 1-\frac{1}{n} < 1$. Donc $-1 \notin A$ et $1 \notin A$. On en déduit que $\boxed{A \text{ n'a ni minimum ni maximum.}}$

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que f est croissante. On note A l'ensemble :

$$A = \{x \in [0;1],\ x \leqslant f(x)\}.$$

1. Montrer que A possède une borne supérieure, notée a.
2. En déduire que $a \leqslant f(a)$.
3. Montrer que $a \geqslant f(a)$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution.
4. On vient de montrer que toute fonction croissante sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ possède au moins un point fixe (l'équation $f(x) = x$ possède au moins une solution). Ce résultat reste-t-il vrai si f est décroissante ?
5. Dans cette dernière question, on modifie les hypothèses : on suppose que la fonction f est continue sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$ (on ne suppose rien sur la monotonie de f sur $[0;1]$). Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

1. On a $0 \in A$ car $0 \leqslant f(0)$. Or A est majorée par 1. Donc A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc $\boxed{A \text{ possède une borne supérieure.}}$
2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est une borne supérieure, il existe $x \in A$ tel que $a-\varepsilon < x \leqslant a$. Comme $x \in A$, on a $f(x) \geqslant x$. Comme f est croissante et que $x \leq a$, on a $f(x) \leqslant f(a)$. En combinant ces relations, on obtient $a-\varepsilon < x \leqslant f(x) \leqslant f(a)$ donc $a-\varepsilon < f(a)$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\boxed{a \leqslant f(a).}$

Commentaire

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $a - \varepsilon < b$. Montrons alors que $a \leqslant b$. Si par l'absurde on avait $a > b$ alors en prenant $\varepsilon = a - b > 0$, on obtiendrait :

$$b = a - (a-b) = a - \varepsilon < b$$

donc $b < b$, ce qui est absurde, donc $a \leqslant b$.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons $a < f(a)$. Alors $f(a) \leqslant f(f(a))$ car f est croissante. Donc $f(a) \in A$. Mais alors, comme $a < f(a)$, cela contredit le fait que a est un majorant (la borne supérieure est un majorant) de A.
Ainsi donc $\boxed{a \geqslant f(a)}$. Combiné au résultat précédent, cela donne $f(a) = a$ et $a \in [0,1]$. Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ possède au moins une solution.}}$

4. Définissons $f : [0,1] \to [0,1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]0,1]$. Alors f est décroissante, mais par construction, $f(x) \neq x$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Le résultat de la question précédente n'est plus vrai si l'on suppose } f \text{ décroissante.}}$

5. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[0,1]$ par différence de telles fonctions et $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$, $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ par hypothèse. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$ c'est-à-dire $f(c) - c = 0$ *i.e* $\boxed{f(c) = c.}$

Exercice 4

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée et non vide et soit $B = \{-x,\ x \in A\}$. Montrer que

$$\sup A = -\inf B.$$

D'abord, comme A est bornée et non vide, A admet une borne supérieure que l'on note M et une borne inférieure que l'on note m. On a donc :

$$\forall x \in A,\ m \leqslant x \leqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ M - \varepsilon < y \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in A,\ m \leqslant z < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Commentaire
La partie B est *symétrique* de A par rapport à 0 sur la droite des réels. Un majorant de A, par symétrie (multiplication par -1) deviendra un minorant de B.

En multipliant toutes ces inégalités par -1, on obtient :

$$\forall x \in A,\ -m \geqslant -x \geqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y \in A,\ -M + \varepsilon > -y \geqslant -M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z \in A,\ m \geqslant -z > -m - \varepsilon. \end{cases}$$

Ou encore :

$$\forall x' \in B,\ -m \geqslant x' \geqslant M \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists y' \in B,\ -M + \varepsilon > y' \geqslant -M, \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists z' \in B,\ m \geqslant z' > -m - \varepsilon. \end{cases}$$

Ce qui signifie que $-M = \inf B$, c'est-à-dire $\boxed{\sup A = -\inf B.}$

Exercice 5

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x| = -2$,
2. $|2x+3| = |6x-1|$,
3. $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4$,
4. $1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6$.

1. Comme $|x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'équation $|x| = -2$ n'a pas de solution.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|2x+3| = |6x-1| \iff \begin{cases} 2x+3 = 6x-1 \\ \text{ou} \\ 2x+3 = -(6x-1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4x = 4 \\ \text{ou} \\ 8x = -2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $|2x+3| = |6x-1|$ est $\left\{-\frac{1}{4}, 1\right\}$.

3. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4 \iff 4 \leqslant x^2 < 5 \iff x \in]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}[.$$

L'ensemble des solutions réelles de l'équation $\left\lfloor x^2 \right\rfloor = 4$ est $]-\sqrt{5}, -2] \cup [2, \sqrt{5}[$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6 &\iff \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ &\iff 1 \leqslant x^2 - 2 < 7 \\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 9 \\ &\iff x \in]-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3[. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $1 \leqslant \left\lfloor x^2 - 2 \right\rfloor \leqslant 6$ est $]-3, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 3[$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4|$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ sans valeurs absolues, suivant les valeurs de x.

2. Dresser le tableau des variations de f. En déduire les minima et maxima de f (locaux et globaux).

3. Dessiner la courbe de f.

1. La quantité $2x-3$ change de signe en $x = \frac{3}{2}$ et la quantité $x+4$ change de signe en $x = -4$, on étudie donc l'expression de f sur trois intervalles :

$$]-\infty;-4], \quad \left]4;\frac{3}{2}\right], \quad \left]\frac{3}{2};+\infty\right[.$$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
expression de $\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$		$-2x+3$	0	$2x-3$		
expression de $\lvert x+4\rvert$	$-x-4$	0	$x+4$		$x+4$		

Ainsi :

- Si $x \leqslant -4$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(-2x+3) + \frac{1}{3}(x+4) = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{6}.$$

- Si $-4 < x \leqslant \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(-2x+3) - \frac{1}{3}(x+4) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}.$$

- Si $x > \frac{3}{2}$:

$$f(x) = \frac{1}{2}|2x-3| - \frac{1}{3}|x+4| = \frac{1}{2}(2x-3) - \frac{1}{3}(x+4) = \frac{2}{3}x - \frac{17}{6}.$$

f est ce qu'on appelle une fonction affine par morceaux :

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{17}{6} & \text{si } x \leqslant -4 \\ -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{6} & \text{si } -4 < x \leqslant \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2}{3}x - \dfrac{17}{6} & \text{si } \dfrac{3}{2} < x. \end{cases}$$

2. Étudions f sur chacun des trois intervalles :

- Sur l'intervalle $]-\infty; 4]$, f est décroissante (coefficient directeur négatif) et :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{3}x + \frac{17}{6} = +\infty.$$

  On a par ailleurs $f(-4) = \dfrac{33}{6} = \dfrac{11}{2}$.
- Sur l'intervalle $\left]4; \dfrac{3}{2}\right]$, f est décroissante et $f(-4) = \dfrac{11}{2}$ et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{6}$.
- Sur l'intervalle $\left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[$: f est croissante et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{11}{6}$ et

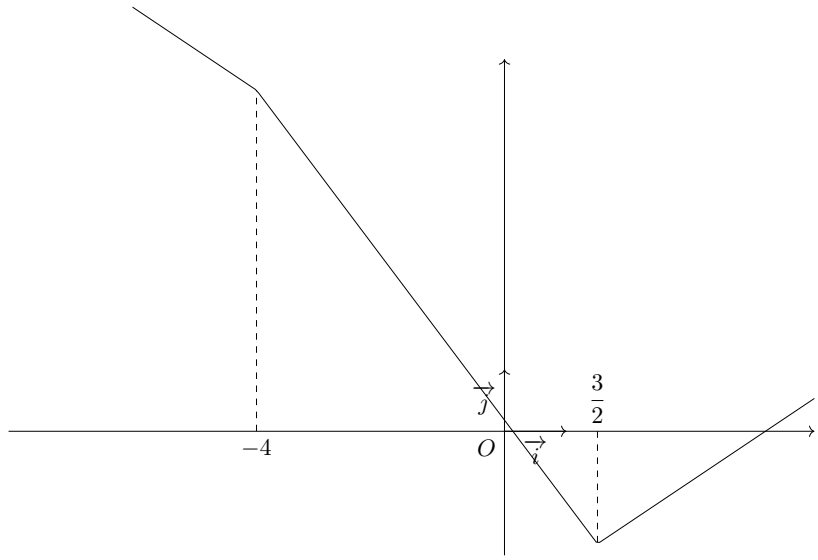
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x - \frac{17}{6} = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-4		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$\dfrac{11}{2}$	↘	$-\dfrac{11}{6}$	↗	$+\infty$

Donc f n'admet pas de maximum (ni global, ni local) et admet un minimum qui est local et global : il est atteint en $x = \dfrac{3}{2}$ et vaut $-\dfrac{11}{6}$.

3. f étant une fonction affine par morceaux, sa représentation graphique est la "concaténation" de trois droites (en fait, un segment et deux demi-droites) :



Exercice 7

Montrer que, pour tous x et y réels,

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Donc en sommant les inégalités de gauche on obtient $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y$. On sait que la fonction $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $\lfloor \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor$, c'est à dire

$$\boxed{\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor.}$$

On a par ailleurs $\lfloor x + y \rfloor \leqslant x + y$ et comme $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y \leqslant \lfloor y \rfloor + 1$, on a $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ et donc

$$\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Mais les deux termes de cette inégalité sont des entiers donc, finalement

$$\boxed{\lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2 - 1 = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.}$$

Commentaire

Pour deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $a < b \iff a \leqslant b - 1$.

Exercice 8

Montrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul n,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \geqslant 1$.

- D'une part, on a par définition :

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1.$$

Il s'ensuit $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Et comme $t \mapsto \lfloor t \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor .$$

- D'autre part, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ (car $n > 0$) et il s'ensuit que $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Comme $n\lfloor x \rfloor$ est entier, on a $n\lfloor x \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$ et donc vient $\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leq \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$. On en déduit :

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Par double inégalité on a

$$\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Exercice 9

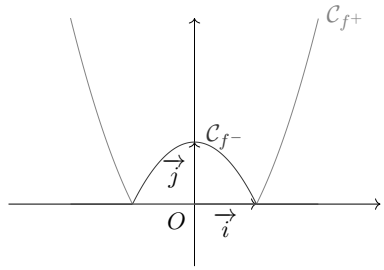
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les fonctions $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$.
1. Si $f : x \mapsto x^2 - 1$, représenter graphiquement f^+ et f^-.
2. Montrer que $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 \leqslant 0$ si et seulement si $x \in [-1, 1]$. On déduit l'expression de f^- et de f^+ selon deux cas :

Premier cas : Si $x \in [-1, 1]$ alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = 1 - x^2$.

Second cas : Si $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ alors $f^+(x) = x^2 - 1$ et $f^-(x) = 0$.

On déduit alors les courbes de f^- et de f^+ en fonction de la courbe de f ou de sa symétrique, $-f$, par rapport à l'axe des abscisses :



2. On distingue deux cas sur $x \in \mathbb{R}$:

Premier cas : Si $f(x) \leqslant 0$ alors $f^+(x) = 0$ et $f^-(x) = -f(x)$. On a alors :

$$f^+(x) - f^-(x) = 0 - (-f(x)) = f(x) \quad \text{et} \quad f^+(x) + f^-(x) = 0 + (-f(x)) = -f(x) = |f(x)|.$$

Second cas : Si $f(x) \geqslant 0$ alors $f^+(x) = f(x)$ et $f^-(x) = 0$. On a alors :

$$f^+(x) - f^-(x) = f(x) - 0 = f(x) \quad \text{et} \quad f^+(x) + f^-(x) = f(x) + 0 = f(x) = |f(x)|.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ donc

$$\boxed{f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.}$$

Chapitre 3. Trigonométrie

Exercice 1

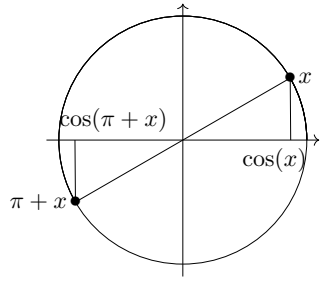
Donner les valeurs de $\cos\left(\dfrac{1651\pi}{6}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Commentaire

Ici, il s'agit simplement de s'aider de la 2π-périodicité des fonctions $\cos$ et $\sin$, ainsi que des angles associés du formulaire de trigonométrie.

D'une part :

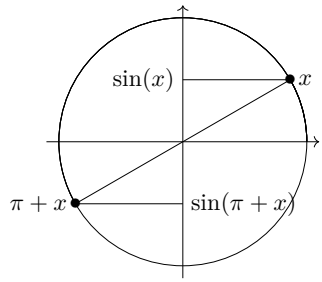
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{1651\pi}{6}\right) &= \cos\left(137\times 2\pi + \frac{7\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\\ &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$



Ainsi $\boxed{\cos\left(\dfrac{1651\pi}{6}\right) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\ .}$

On obtient de même :

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right) &= \sin\left(2\times 2\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\\ &= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$



Ainsi $\boxed{\sin\left(\dfrac{21\pi}{4}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\ .}$

Exercice 2

Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Commentaire

Ici, on montre comment faire le calcul soit à l'aide des formules d'addition, soit de duplication. Pour montrer l'égalité des deux résultats obtenus, on peut montrer que leurs carrés sont égaux, et, puisqu'ils sont de même signe, conclure.

Avec les formules d'addition, on obtient par exemple :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}} \ .$$

Avec les formules de duplication, on obtient par exemple :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \ .$$

Puis comme $\frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$, et donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}} \ .$

Exercice 3

Vérifier qu'il existe un réel a vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(3x) = a\sin(x)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \ .$$

Commentaire

Ici, il s'agit à nouveau d'utiliser le formulaire de trigonométrie, en utilisant les formules de linéarisation (qui permettent de passer d'un produit à une somme).

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin(x)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{-\sin(x)}{2}\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{3} + x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - x - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{-\sin(x)}{2}\left(\cos\left(2x + \pi\right) - \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(2x)\right) + \frac{\sin(x)}{4} \\
&= \frac{\sin(3x) - \sin(x)}{4} + \frac{\sin(x)}{4} = \frac{\sin(3x)}{4} \ .
\end{aligned}$$

Le réel $a = 4$ répond donc bien au problème posé.

Exercice 4

La tangente de l'angle moitié.

1. Pour quelles valeurs du réel x le réel $\tan(x/2)$ est-il bien défini ?

2. Pour ces valeurs-là, on pose donc $t = \tan(x/2)$.

Démontrer alors que

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}\ .$$

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $1 - t^2 \neq 0$?

4. Pour ces valeurs-là exprimer $\tan(x)$ en fonction de t.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\tan(x/2) \text{ est bien défini } \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x/2 \neq \pi/2 + k\pi \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \pi + 2k\pi.$$

Le réel $\tan(x/2)$ est donc bien défini si et seulement si $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Soit donc $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $t = \tan(x/2)$.

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{1 + \dfrac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos(2 \times x/2) = \cos(x).$$

Ainsi $\boxed{\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ .}$

On obtient de même :

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{\dfrac{2\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{1 + \dfrac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)} = \sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(2 \times x/2) = \sin(x).$$

Ainsi $\boxed{\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}\ .}$

3. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ (il est nécessaire que $t = \tan(x/2)$ soit bien défini).
On a les équivalence suivantes :

$$1 - t^2 \neq 0 \iff t \neq 1 \text{ et } t \neq -1 \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x/2 \neq \pi/4 + k\pi/2 \iff \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \pi/2 + k\pi.$$

Ainsi $1 - t^2$ est non nul si et seulement si $x \in \mathbb{R}\setminus(\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\})$.

4. Soit donc $x \in \mathbb{R}\setminus(\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\})$.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1+t^2}\frac{1+t^2}{1-t^2} = \frac{2t}{1-t^2}\ .$$

Ainsi $\boxed{\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}}$.

Exercice 5

Donner les ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation $\cos(3x) = \dfrac{1}{2}$, dans $\mathbb{R}$, puis $[0, 2\pi[$. Représenter les solutions de $[0, 2\pi[$ sur le cercle trigonométrique.

Commentaire

Dans ce genre d'exercice, on cherche à écrire le membre de gauche sous la forme d'un seul cosinus, sinus, ou tangente, dépendant de l'inconnue.

Ainsi on peut se ramener à l'une des équations suivantes, dont on donne le début de résolution.

Pour tout réel x :

$$\text{i)} \quad \forall a \in [1,1] \quad \cos(x) = a \iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \arccos(a) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = -\arccos(a) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{ii)} \quad \forall a \in [1,1] \quad \sin(x) = a \iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \arcsin(a) + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \arcsin(a) + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{iii)} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \tan(x) = a \iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \arctan(a) + k\pi.$$

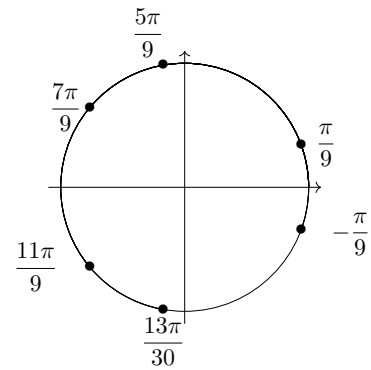
On peut également se ramener à des équations d'inconnue x du type $\cos(x) = \cos(y)$, $\sin(x) = \sin(y)$, ou $\tan(x) = \tan(y)$, qui se résolvent de la même manière.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(3x) = \frac{1}{2} \iff \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad x = \dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases} .$$



Ainsi, $\boxed{\mathcal{S}_1 = \left\{\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{-\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$ et $\boxed{\mathcal{S}_2 = \left\{\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{11\pi}{9}, \dfrac{13\pi}{9}, \dfrac{17\pi}{9}\right\}}$.

Exercice 6

Donner les ensembles $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des solutions de l'équation $\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}$, dans $\mathbb{R}$, puis $[-\pi,\pi[$.

Commentaire

On cherche encore à se ramener au même type d'équation que précédemment, cette fois-ci en partant d'une équation du type $a\cos(\phi)+b\sin(\phi)=c$.
La méthode consiste à factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$ dans le membre de gauche, puis à trouver un angle donc le cosinus vaut $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et donc le sinus vaut $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
A nouveau on commence par regarder l'ensemble des solutions réelles, puis l'ensemble de solutions dans l'ensemble demandé.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2} &\iff 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)\right)=\sqrt{2}\\
&\iff \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&\iff \begin{cases} \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{-\pi}{4}+2k\pi \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k\in\mathbb{Z},\quad x=\dfrac{-\pi}{12}+2k\pi \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathcal{S}_1=\left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}.}$

Dans $[-\pi,\pi[$, on obtient $\boxed{\mathcal{S}_2=\left\{\frac{-\pi}{12},\ \frac{5\pi}{12}\right\}\ .}$

Commentaire

Si on veut faire des liens avec la physique. On a souvent affaire à des fonctions de la forme $t\mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$, avec $A>0$ l'amplitude, $\omega>0$ la pulsation et $\varphi\in\mathbb{R}$ la phase à l'origine. Du point de vue de la dimension, ωt et φ n'ont pas de dimension. Souvent t indexe le temps et alors la pulsation ω est homogène à T^{-1}.

Ces fonctions sont classiquement les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ appelée équation de l'oscillateur harmonique.

La théorie générale des équations linéaires d'ordre deux assure que les solutions sont de la forme $t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour donner une expression avec une phase à l'origine, on écrit, pour $t \in \mathbb{R}$, (dans le cas où $(a,b) \neq (0,0)$)

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(\omega t)\right).$$

Or, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc, d'après le cours, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin(\varphi) \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos(\varphi).$$

Mais alors, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(\omega t)\right) &= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin(\varphi)\cos(\omega t) + \cos(\varphi)\sin(\omega t)\right)\\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis sur $[0, 2\pi[$ et enfin dans $]-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2\cos^2(4x) + \cos(4x) < 1.$$

Commentaire

Le but est à nouveau de réécrire le premier membre pour se ramener à une équation du type $\cos(x) > \ldots$, ou $\sin(x) < \ldots$.

L'exercice précédent nous a montré la méthode lorsque le premier membre est du type $a\cos(\phi) + b\sin(\phi)$.

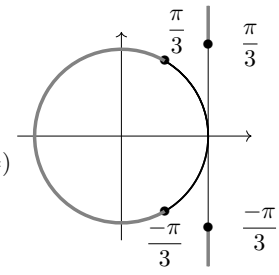
Ici, nous donnons un exemple qui se résout à l'aide d'un changement de variable.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose le changement de variable $X = \cos(4x)$, et on obtient

$$2\cos^2(4x) + \cos(4x) < 1 \iff 2X^2 + X - 1 < 0 \iff X \in \left]-2, \frac{1}{2}\right[\iff \cos(4x) \in \left]-2, \frac{1}{2}\right[.$$

Alors :

$$\begin{aligned}2\cos^2(4x) + \cos(4x) < 1 &\iff \cos(4x) < \frac{1}{2}\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{3} + 2k\pi < 4x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (*)\\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$



Commentaire
Pour obtenir $(*)$, on utilise le graphe du cercle trigonométrique et on regarde, sur l'axe vertical, les réels dont le cosinus est strictement inférieurs à $1/2$.

Finalement, dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}_1 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right[}$.

Dans $[0, 2\pi[$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \left]\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12}\right[}\ .$$

Dans $]-\pi; \pi]$ on obtient :

$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left]-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}\right[\cup \left]-\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right[}\ .$$

Exercice 8

Résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'inéquation

$$(E): \quad \tan x \geqslant 2\sin x.$$

Déterminer $\mathcal{D}_E$ l'ensemble de définition de l'équation (E).
Soit $x \in]-\pi; \pi]$.

$$x \in \mathcal{D}_E \iff \tan(x) \text{ est bien définie } \iff x \neq -\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2}\ .$$

Ainsi $\mathcal{D}_E =]-\pi; \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
Soit donc $x \in \mathcal{D}_E$.

$$\tan(x) \geqslant 2\sin(x) \iff \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geqslant 2\sin(x).$$

Commentaire
Le réflexe ici est de multiplier les deux membres de l'inégalité pas $\cos(x)$ puis de les simplifier ensuite par $\sin(x)$.
Il faut cependant déterminer le signe de ces deux valeurs afin de pouvoir connaître le sens de l'inégalité à laquelle on aboutit : c'est pour cela qu'on doit faire quatre cas.

Cas 1 : Si $x \in \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$: dans ce cas $\cos(x) < 0$, et $\sin(x) < 0$. Alors :

$$(E) \iff \sin(x) \leqslant 2\sin(x)\cos(x) \iff \frac{1}{2} \geqslant \cos(x).$$

Tous les réels de l'intervalle $\left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[$ sont donc solutions.

Cas 2 : Si $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, 0\right[$: dans ce cas $\cos(x) > 0$, et $\sin(x) < 0$. Alors :

$$(E) \iff \sin(x) \geqslant 2\sin(x)\cos(x) \iff \frac{1}{2} \leqslant \cos(x) \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right[\cdot$$

Les réels de l'intervalle $\left]\dfrac{-\pi}{2}, 0\right[$ qui sont solutions sont donc les réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{3}, 0\right[$.

Cas 3 : Si $x = 0$: dans ce cas l'inégalité est vérifiée (ses deux membres sont nuls), 0 est donc solution.

Cas 4 : Si $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$: dans ce cas $\cos(x) > 0$, et $\sin(x) > 0$. Alors :

$$(E) \iff \sin(x) \geqslant 2\sin(x)\cos(x) \iff \frac{1}{2} \geqslant \cos(x) \iff x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cdot$$

Les réels de l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ qui sont solutions sont donc les réels de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Cas 5 : Si $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$: dans ce cas $\cos(x) < 0$, et $\sin(x) > 0$. Alors :

$$(E) \iff \sin(x) \geqslant 2\sin(x)\cos(x) \iff \frac{1}{2} \leqslant \cos(x).$$

Les réels de l'intervalle $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ ne sont donc pas solutions.

Cas 6 : Si $x = \pi$: dans ce cas l'inégalité est vérifiée (ses deux membres sont nuls), π est donc solution.

En conclusion l'ensemble des solutions de (E) dans $]-\pi, \pi]$ est l'ensemble :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left]-\pi, \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{3}, 0\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \{\pi\}\,.}$$

Exercice 9

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue réelle x

$$\cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot$$

1. Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.
Dans la suite on notera cette solution α.
2. Calculer $\cos(2\alpha)$ puis démontrer que $\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha)$.
3. En déduire la valeur de α.
4. Résoudre l'équation.

1. On utilise ici le théorème de la bijection :

- cos est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- cos est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$;
- $\lim\limits_{t\to 0}\cos(t) = 1$ est strictement décroissante sur $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}}\cos(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après le théorème de la bijection, cos réalise donc une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ vers $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

Vérifions que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \iff 2\sqrt{2} < 1+\sqrt{5} < 4.$$

En utilisant la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \iff (2\sqrt{2})^2 < (1+\sqrt{5})^2 < 4^2 \iff 8 < 6+2\sqrt{5} < 16 \iff 1 < \sqrt{5} < 5.$$

Cette dernière inégalité étant vraie, la première l'est aussi et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \in \left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

Le réel $\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ a donc un unique antécédent par cos dans $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ · L'énoncé le note α.

Commentaire

Arrêtons-nous sur la justification par la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ de :

$$(\diamond) \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{4} < 1 \iff (2\sqrt{2})^2 < (1+\sqrt{5})^2 < 4^2.$$

En effet, **la définition** de la stricte croissance d'une fonction f sur un intervalle I ne donne que l'implication :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \Longrightarrow f(a) < f(b).$$

On peut ensuite démontrer, pour une fonction f strictement croissante sur I, **les propriétés** :

$$(*) \quad \forall (a,b) \in I^2, \quad a < b \iff f(a) < f(b)$$

et : $$(**) \quad \forall (a,b) \in I^2, \quad a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b).$$

On obtient donc, puisque la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad a < b \iff a^2 < b^2.$$

On applique d'abord cette équivalence à $a = \sqrt{2}/2$ et $b = (1+\sqrt{5})/4$ qui sont bien des réels positifs, puis à $a = (1+\sqrt{5})/4$ et $b = 1$, et on obtient l'équivalence $(\diamond)$.

Quelques remarques pour conclure :

- Les propriétés $(*)$ et $(**)$ sont très utiles pour résoudre des équations, où il est nécessaire d'obtenir l'équivalence : x vérifie l'équation $(E) \iff x$ est dans l'ensemble $\mathcal{S}$.
- On a bien sûr les mêmes propriétés (avec des inégalités de sens opposé entre $f(a)$ et $f(b)$) lorsque f est strictement décroissante.
- Attention : la simple monotonie (croissance ou décroissance) d'une fonction ne nous permet d'obtenir aucune équivalence.

2. On calcule :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{2\sqrt{5}-2}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot$$

De même :

$$\cos(4\alpha) = 2\cos^2(2\alpha) - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{6-2\sqrt{5}}{8} - 1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} = -\cos(\alpha).$$

Ainsi $\boxed{\cos(4\alpha) = -\cos(\alpha).}$

3. Le réel α est donc solution de l'équation $\cos(4x) = -\cos(x)$. Résolvons-la.

Soit $x \in \mathbb{R}$. En se référant au commentaire de l'exercice 5 ,

$$\begin{aligned}
\cos(4x) = -\cos(x) &\iff \cos(4x) = \cos(\pi - x) \\
&\iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 4x = \pi - x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ 4x = x - \pi + 2k\pi \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{5} + \dfrac{2k\pi}{5} \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{-\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

La seule solution de cette équation dans $\left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ étant $\frac{\pi}{5}$, on en conclut que $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{5}\cdot}$

Commentaire

Cela est courant dans les exercices de trigonométrie :

- grâce au formulaire, on trouve une égalité que vérifie la valeur qu'on cherche,
- puis on détermine les réels qui vérifient cette égalité (on résout une équation)
- la valeur qu'on cherche est donc une de ces solutions : on essaie enfin de déterminer laquelle (s'il y en a plusieurs).

4. On peut donc maintenant résoudre l'équation initiale.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Toujours à l'aide de la même méthode :

$$\begin{aligned}\cos(x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4} &\iff \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\\ &\iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = \dfrac{-\pi}{5} + 2k\pi. \end{cases}\end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{-\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.}$

Exercice 10

1. Pour tout réel x, linéariser $\cos^2(x)\sin^3(x)$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéarisons :

$$\begin{aligned}\cos^2(x)\sin^3(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\sin(x)\sin^2(x)\\ &= \frac{1+\cos(2x)}{2}\sin(x)\frac{1-\cos(2x)}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sin(x)\left(1-\cos^2(2x)\right)\\ &= \frac{1}{4}\sin(x)\left(1-\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)\\ &= \frac{1}{8}\sin(x) - \frac{\sin(x)\cos(4x)}{8}\\ &= \frac{1}{8}\sin(x) - \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{16}\\ &= \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x,\ \cos^2(x)\sin^3(x) = \frac{1}{8}\sin(x) + \frac{1}{16}\sin(3x) - \frac{1}{16}\sin(5x).}$

2. La seconde écriture de la forme algébrique de la fonction nous permet de conclure qu'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^2(x)\sin^3(x)$ est la fonction :

$$\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{8}\cos(x) - \frac{1}{48}\cos(3x) + \frac{1}{80}\cos(5x).}$$

Commentaire
Linéariser $\cos^p(x)\sin^q(x)$ c'est l'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, pour des valeurs entières de n.
La linéarisation permet principalement de déterminer des primitives de fonctions.

Exercice 11

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto 3\cos(x) - \cos(3x)$.

2. Écrire une fonction Python prenant en paramètres deux réels a et b et permettant de tracer le graphe de f sur l'intervalle $[a, b]$.

1. Suivons le plan d'étude habituel pour les fonctions trigonométriques.

Ensemble de définition : Comme somme de fonctions définies sur $\mathbb{R}$, f est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}.}$

Parité : Soit $x \in \mathcal{D}_f$. D'une part $-x \in \mathcal{D}_f$.

Puis, par parité de cos, $f(-x) = 3\cos(-x) - \cos(-3x) = 3\cos(x) - \cos(3x) = f(x)$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc paire.}}$

Périodicité : Soit $x \in \mathcal{D}_f$. D'une part $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$.

De plus, $f(x + 2\pi) = 3\cos(x) < +2\pi) - \cos(3x + 6\pi) = 3\cos(x) - \cos(3x) = f(x)$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc } 2\pi\text{-périodique.}}$

Réduction de l'intervalle d'étude : Procédons en deux temps.

- ⋆ f étant 2π-périodique, on réduit son intervalle d'étude à $\mathcal{D}_f \cap [-\pi, \pi] = [-\pi, \pi]$.
- ⋆ f étant paire, on réduit à nouveau son intervalle d'étude à $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{R}_+ = [0, \pi]$.

$\boxed{\text{On étudie donc } f \text{ sur } [0, \pi].}$

Variations : D'une part $x \mapsto 3x$ est dérivable sur $[0, \pi]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, ensemble sur lequel cos est dérivable : par composition $x \mapsto \cos(3x)$ est dérivable sur $[0, \pi]$.

D'autre part cos est dérivable sur $[0, \pi]$.

Par produit $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0, \pi]}$ et :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f'(x) = -3\sin(x) + 3\sin(3x) = 3\left(\sin(3x) - \sin(x)\right) = 6\cos(2x)\sin(x).$$

Déterminons le signe de $f'(x)$, pour tout $x \in [0, \pi]$.

- ⋆ Tout d'abord, pour tout $x \in [0, \pi]$ $f'(x) = 0 \iff x \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}$
- ⋆ Ensuite, pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $\sin(x) > 0$, et comme $2x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(2x) > 0$.

  Alors pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, $f'(x) > 0$.

Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, f' est ainsi à valeurs positives et ne s'annule qu'en deux points.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\ .}$

- ⋆ Pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $\sin(x) > 0$, et comme $2x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $\cos(2x) < 0$.

  Alors, pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$, $f'(x) < 0$.

Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, f' est ainsi à valeurs négative et ne s'annule qu'en deux points.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur } \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[\ .}$